Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,
Universidad de Guanajuato
Tarea 4 de Álgebra Lineal II: Subespacios Invariantes.
lunes 24 de septiembre de 2012
Fecha de entrega: lunes 1 de octubre de 2012.

Dado un espacio vectorial V sobre un campo K, un *operador lineal T sobre V* es un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V)$.

1. Sea T un operador lineal sobre V tal que todo subespacio de V es invariante por T. Pruebe que, entonces, T es un múltiplo escalar del operador lineal identidad.

2. Sea $f \in \mathrm{End}(E)$, $\dim E = n$. Demostrar que:

   a) Existe un entero $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Nuc} f^k = \mathrm{Nuc} f^{k+j}$ para todo $j \geq 0$.

   b) $E = \mathrm{Nuc} f^k \oplus \mathrm{Im} f^k$ y $f|_{\mathrm{Im} f^k}$ es un automorfismo de $\mathrm{Im} f^k$.

3. Sean T un operador lineal diagonalizable sobre un espacio vectorial V de dimensión n y W un subespacio invariante por T. Demostrar que la restricción $T|_W : W \longrightarrow W$, también es diagonalizable.

4. Sea T un operador lineal sobre el espacio vectorial V con polinomio característico:

   $$p_T(x) = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

   y polinomio mínimo

   $$m_T(x) = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}, \text{ con } r_i \leq d_i,\ i = 1, \dots, k.$$

   Sea W_i el núcleo de $(T - c_i I)^{r_i}$.

   a) Demostrar que W_i es el conjunto de los vectores α tales que $(T - c_i I)^s \alpha = 0$ para algún entero s.

   b) Demostrar que la dimensión de W_i es d_i.